数理解析研究所講究録
第 1738 巻 2011 年 83-91

グレイシャー対応と
ヘッケ環の次数付きカルタン行列

安東雅訓, 鈴木武史, 山田裕史
(岡山大学大学院自然科学研究科)

オイラーの「奇分割・ストリクト分割の等式」の全単射証明の方法の一つに「グレイシャー対応」というものがある．これは一般に p-類正則分割と p-正則分割の間の全単射対応を与えるものである．ここでは [ASY] に従って，グレイシャー対応の各ステップにウエイトを付けたものを考える．そのウエイト達の積は A 型の岩堀-ヘッケ環の次数付きカルタン行列の行列式になっており，宇野-山田の式 [UY] の次数付き版を与える．

1　分割の恒等式

まずは分割に関するちょっと奇妙な式を紹介しよう．いつものように $\mathcal{P}(k)$ で自然数 k の分割の全体を表す．また $\mathcal{P}$ を分割全体の集合とする．自然数 n に対して $\mathrm{ord}_p n$ は n を p 進表示したときの桁数を表すものとする．たとえば $\mathrm{ord}_p p = 2$ である．

定理 1.1. 自然数 $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して

$$\sum_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\ldots)\in\mathcal{P}(k)} m_l = \sum_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\ldots)\in\mathcal{P}(k)} \sum_{i,\, p\nmid i} \mathrm{ord}_p \left\lfloor \frac{m_i}{l} \right\rfloor.$$

ここで $\lfloor\ \rfloor$ はガウス記号，すなわち整数部分を表す．

等式の右辺は p に依存するが, 左辺は p に依らない．その意味で「奇妙」と言った．

例えば $k=5, \ell=1$ とし，$p=2,3$ の場合に表を描いて見よう.

λ	m_1	$\sum_{i,\,2\nmid i} \mathrm{ord}_2 m_i$	$\sum_{i,\,3\nmid i} \mathrm{ord}_3 m_i$
(5)	0	1	1
(14)	1	$1+\_$	$1+1$
(23)	0	$\_+1$	$1+\_$
$(1^2 3)$	2	$2+1$	$1+\_$
(12^2)	1	$1+\_$	$1+1$
$(1^3 2)$	3	$2+\_$	$2+1$
(1^5)	5	3	2
和	12	12	12

証明. 自然数 k についての左辺の母関数を考える. 任意の j について

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\dots)\in\mathcal{P}(k)} m_j\right)q^k = \frac{1}{\varphi(q)}\cdot\frac{q^j}{1-q^j} = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{k=0}^{\infty} q^{jk}$$

である. ここで $\varphi(q)$ はオイラー関数，すなわち

$$\varphi(q) := \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

である. また定理の右辺の母関数は

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\dots)\in\mathcal{P}(k)}\ \sum_{i,\,p\nmid i}\mathrm{ord}_p\left(\left\lfloor\frac{m_i}{j}\right\rfloor\right)\right)q^k = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{i,\,p\nmid i}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} q^{jip^\ell}\right).$$

となる. 任意の自然数 k は $k=ip^\ell$ $(i,p)=1$ という形の一意的な表示があるので, jip^ℓ は j の倍数すべてを動く. よって両辺の母関数は等しい. □

上のような直接証明もできるが, 我々はこれを A 型岩堀-ヘッケ環の次数付きカルタン行列の行列式を求める過程で得た. その背景を以下に説明しよう.

2 分割のウエイト

ここでは議論に必要な組合せ論を準備する.

定義 2.1. 分割 $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}) \in \mathcal{P}(n)$ が p-正則であるとはすべての i について $m_i < p$ であることと定義する. また λ が p-類正則であるとはすべての i について $m_{pi} = 0$ であることと定義する. n の p-正則な分割全体の集合を $\mathcal{P}^{(p)}(n)$, p-類正則な分割全体の集合を $\mathcal{P}_{(p)}(n)$ と表す.

$\mathcal{P}^{(p)}(n)$ と $\mathcal{P}_{(p)}(n)$ の元の個数が等しいことはよく知られており, その間の全単射は次のような「グレイシャー対応」で与えられる.

いま $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n})$ を n の p-類正則な分割とする. $m_i \geq p$ であるとき, (i^{m_i}) を $(i^{m_i-p}\ pi)$ で置き換える. この操作を, p 個以上現れる成分がなくなるまで続ける. こうして得られる分割 $\tilde{\lambda}$ は n の p-正則な分割となる. この対応をグレイシャー対応と呼ぶ. これが全単射対応であることを確かめるのは易しい.

例を一つ挙げよう. $p = 2$ とし, $\lambda = (1^9\,3\,5^3) \in \mathcal{P}_{(2)}(27)$ とする.

$$\begin{aligned}\lambda =&(1^9\,3\,5^3) \to (1^7\,2\,3\,5^3) \to (1^5\,2^2\,3\,5^3) \to (1^3\,2^3\,3\,5^3) \to \\ &(1\,2^4\,3\,5^3) \to (1\,2^2\,3\,4\,5^3) \to (1\,3\,4^2\,5^3) \to (1\,3\,5^3\,8) \to (1\,3\,5\,8\,10) = \tilde{\lambda}.\end{aligned}$$

出来上がりの $\tilde{\lambda}$ は 2-正則, すなわちストリクトな分割である.

次に $\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)$ にウエイトを付ける. $q^{2\ell}$ ベースの q-整数を

$$[p]_\ell = \frac{1-q^{2p\ell}}{1-q^{2\ell}}$$

で表す. グレイシャー対応の各ステップ

$$(i^{m_i}) \longrightarrow (i^{m_i-p}\ pi)$$

に対して $[p]_i$ を対応させる.

定義 2.2. p-類正則な分割 λ に対して「グレイシャーウエイト」$w_G(\lambda)$ を, グレイシャー対応の各ステップに対応する $[p]_i$ 達の積と定義する.

先程の例では $w_G(\lambda) = [p]_1^4[p]_2^2[p]_4[p]_5$ となる.

もう一つのウエイトを定義したい．pを1より大きい自然数とする．正整数kが整数aを用いて$k = p^j a$, $p \nmid a$と書けるとき, $(k)_p := p^j$をkのp-部分, $(k)_{p'} := a$をkのp'-部分と呼ぶ．正整数kに対して,

$$(k)_{[p]} := [p]_a [p]_{ap} \cdots [p]_{ap^{j-1}}$$

とおく．ここで$k = p^j a$, $a = (k)_{p'}$とした．

定義 2.3. p-類正則な分割λに対して$w_E(\lambda)$を

$$w_E(\lambda) := \prod_{i \geq 1} \prod_{j=1}^{m_i} (j)_{[p]}$$

により定義する．名前はまだない．

先の例では$w_E(\lambda) = [p]_1^4 [p]_2^2 [p]_3 [p]_4$となる．

我々の基本定理は，2つのウエイトの積が一致する，というものである．

定理 2.4. 自然数$p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$について

$$\prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} w_G(\lambda) = \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} w_E(\lambda).$$

証明について述べる前に一つだけ例を見てみる．$p = 2$とし，サイズが8の奇分割について2つのウエイトを計算すると以下のようになる．

$$w_G(1\,7) = 1 \qquad w_E(1\,7) = 1$$

$$w_G(3\,5) = 1 \qquad w_E(3\,5) = 1$$

$$w_G(1^3\,5) = [p]_1 \qquad w_E(1^3\,5) = [p]_1$$

$$w_G(1^2\,3^2) = [p]_1 [p]_3 \qquad w_E(1^2\,3^2) = [p]_1^2$$

$$w_G(1^5\,3) = [p]_1^2 [p]_2 \qquad w_E(1^5\,3) = [p]_1^2 [p]_2$$

$$w_G(1^8) = [p]_1^4 [p]_2^2 [p]_4 \qquad w_E(1^8) = [p]_1^3 [p]_2^2 [p]_3 [p]_4$$

ここでは$p = 2$だが, 紛らわしいので$[p]$で表示している．

$$\prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(2)}(8)} w_G(\lambda) = [p]_1^8 [p]_2^3 [p]_3 [p]_4 = \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(2)}(8)} w_E(\lambda)$$

であることが見て取れる．

定理の証明については方針だけを書いておく．詳しくは [ASY] を見られたい．p-類正則な n の分割 $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n})$ と $i \not\equiv 0 \pmod{p}$ に対して，図形

$$D_i(\lambda) = \left\{ (j,k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m_i}{p} \right\rfloor ,\ p^j | k \right\}$$

を用意する． 例えば $p = 2$, $\lambda = (1^9 3 5^3)$ であれば，

$$D_1(\lambda) = \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ & \square & & \square \\ & & & \square \end{array} \qquad D_5(\lambda) = \square$$

他の i に対しては $D_i(\lambda) = \emptyset$ となる．これらのマス目の集合を

$$\mathfrak{D}(n) = \mathfrak{D}(n,p) = \left\{ (\lambda; i, j, k) \mid \lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n),\ i \not\equiv 0 \pmod{p},\ (j,k) \in D_i(\lambda) \right\}.$$

とおき，その上の 2 つの盤，E, G を考える．

$$G,\ E : \mathfrak{D}(n) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

$\mathfrak{D}(n)$ のマス目 $c = (\lambda; i, j, k)$ に対して，$G(c) = ip^j$, $E(c) = k/p^j$ と定義する．上の例の λ について，$D_1(\lambda)$ 上の盤 G, E はそれぞれ

$$G(D_1(\lambda)) = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ & \boxed{2} & & \boxed{2} \\ & & & \boxed{4} \end{array} \qquad E(D_1(\lambda)) = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ & \boxed{1} & & \boxed{2} \\ & & & \boxed{1} \end{array}$$

となる．G, E の定義からこれらは $w_G(\lambda)$, $w_E(\lambda)$ に対応するものである．従って定理の式を次のように書き直すことができる．

$$\prod_{c \in \mathfrak{D}(n)} [p]_{G(c)} = \prod_{c \in \mathfrak{D}(n)} [p]_{E(c)}.$$

そこで

$$\alpha : \mathfrak{D}(n) \longrightarrow \mathfrak{D}(n)$$

であって，$\alpha^2 = id$, $E \circ \alpha = G$ を満たすようなものを構成すればよい．

3 次数付きカルタン行列

1996年に Lascoux, Leclerc, Thibon は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_p)$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ の大域結晶基底を計算するアルゴリズムを発表した [LLT]. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_p)$ の基本表現はフォック空間

$$\mathfrak{F} := \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}} \mathbb{Q}(q)\lambda$$

の最高次既約成分として実現される. 基本表現の大域結晶基底 (lower global crystal basis) を $\{\mathcal{G}(\mu) \mid \mu \in \mathcal{P}^{(p)}\}$ とするとき展開係数 $d_{\lambda\mu}(q)$ を

$$\mathcal{G}(\mu) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} d_{\lambda\mu}(q)\lambda$$

により定義し, これらを行列の形に並べて

$$D_n(q) := (d_{\lambda\mu}(q))_{\lambda\in\mathcal{P}(n),\, \mu\in\mathcal{P}^{(p)}(n)}$$

とおく. 有木氏 [Ar] により, $D_n(1)$ は A 型の岩堀-ヘッケ環 $\mathcal{H}_n(\zeta)$ (ただし ζ は 1 の原始 p 乗根) の「分解行列」であることが示されている. 我々は q を特殊化せず, そのかわり, より易しい

$$C_n(q) := {}^tD_n(q)D_n(q)$$

を問題にした. これが表題の「次数付きカルタン行列」である.

先の定理に登場した積

$$\prod_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)} w_G(\lambda) = \prod_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)} w_E(\lambda)$$

が $C_n(q)$ の行列式に一致するというのが「本当に言いたいこと」である.

定理 3.1. $C_n(q)$ の行列式は (符号を無視すれば) 次で与えられる.

$$\det C_n(q) = \prod_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)} w_G(\lambda) = \prod_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)} w_E(\lambda).$$

定義に従って w_E を書き直せば

$$\det C_n(q) = \prod_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n})\in\mathcal{P}_{(p)}(n)} \prod_{i\geq 1} \prod_{j=1}^{m_i} (j)_{[p]}$$

となるが，これは，p が素数の場合は，標数 p の対称群のカルタン行列 C_n に関する古典的な結果

$$\det C_n = \prod_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n})\in\mathcal{P}_{(p)}(n)} \prod_{i\geq 1}(m_i!)_p$$

の q-類似を与えている.

定理の証明には土岡俊介氏による次数付き Shapovalov 形式のグラム行列式の表示 [Tsu] を用いる. 丁寧に自身の公式の説明をして下さった土岡氏に感謝する. Shapovalov 形式のグラム行列が岩堀-ヘッケ環のカルタン行列に他ならないことは [BK] で示されている.

4　ブロックでの議論

特に $p=2$ の場合のグレイシャー対応は, 奇分割・ストリクト分割の間の全単射である. このときは定理の式を n の分割全体での積から，ブロックごとの積に精密化することができる. そのために *H-abacus*([BO], [UY]) を用いる. これはストリクト分割の表示方の一つである.

例えば $\lambda=(2\,3\,7\,9)$ の H-abacus は次のようになる.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 3 \\ 2 & & \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & & \\ 8 & 9 & 11 \end{array}$$

つまり λ の成分の場所に珠 “○” を置くのだ. (ちなみにソロバンダマには「珠」の字をあてるのが相応しい) 与えられた λ の H-abacus について次の操作を行うことで *H-core* λ^H を得る.

(*i*) ある珠の 1 つ上の位置が空いていればその珠を 1 つ上に上げる.
(*ii*) 2 の位置の珠を取り去る.
(*iii*) 1 と 3 の位置に珠があればそれらを同時に取り去る.

この操作でできる H-core，すなわち「手詰まり状態」は

$$HC := \{\phi, (1\ 5\ \ldots\ 4m-3\ 4m+1), (3\ 7\ \ldots\ 4m-1\ 4m+3) \mid m \geq 0\}.$$

のどれかの形になっている．例えば先程の $\lambda = (2\,3\,7\,9)$ の H-core は $\lambda^H = (3)$ となる．簡単なことだが H-core のマス目の数は三角数になっており，三角数を一つ決めればその数のマス目を持つ H-core が唯一つ存在する．三角数といえば階段，つまり *2-core* のヤング図形．すなわち HC と 2-core の集合

$$\{\Delta_0 = \emptyset, \Delta_m = (1\ 2\ \ldots\ m) \mid m \geq 1\}$$

との間にマス目の個数を保つ全単射が唯一つ存在する．Δ_m をヤング図形の対角線のフックで分解する操作（「ホッケの開き」）u がこの全単射対応になっている．よって

$$HC = \{\Delta_m^u \mid m \geq 0\},$$

とかくことができる．ここで λ^u は λ を u で開いたものを表す．例えば $\Delta_4^u = (3,7)$ である．

さて $p=2$ の場合の定理 2.4 の精密化は以下の通りである．

定理 4.1. 自然数 m に対して，

$$\prod_{\lambda} w_G(\lambda) = \prod_{\lambda} w_E(\lambda).$$

ここで λ は n の奇数分割で $(\tilde{\lambda})^H = \Delta_m^u$ のもの全体を動く．

証明は簡単だ．きちんとは述べないが，定理 2.4 の証明で構成した α が $\tilde{\lambda}$ の H-core を変えないことから分かる．この両辺が土岡氏のブロック行列式に一致することも確かめられる．

参考文献

[Ar] S. Ariki, On the decomposition numbers of the Hecke algebra $G(m, 1, n)$, J. Math., Kyoto Univ. 36 (1996), 789-808.

[ASY] M. Ando, T. Suzuki and H.-F. Yamada, Determinant of the graded Cartan matrices and Glaisher correspondence, arXiv:1005.1132v4 [math.CO].

[BK] J. Brundan and A. S. Kleshchev, Cartan determinants and Shapovalov forms, Math. Ann. 324 (2002), 431-449.

[BO] C. Bessenrodt and J. B. Olsson, The 2-blocks of the covering groups of the symmetric groups, Adv. Math. 129 (1997), 261-300.

[LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon, Hecke algebras at root of unity and crystal bases of quantum affine algebras, Commun. Math. Phys. 81 (1996), 105-263.

[Tsu] S. Tsuchioka, Graded Cartan determinants and Shapovalov forms, private communications.

[UY] K. Uno and H.-F. Yamada, Elementary divisors of Cartan matrices for symmetric groups, J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 1031-1036.